Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

PHẦN I. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1. Cho điểm M và mặt phẳng (α) có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α)?

A. 2. **B.** Vô số. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

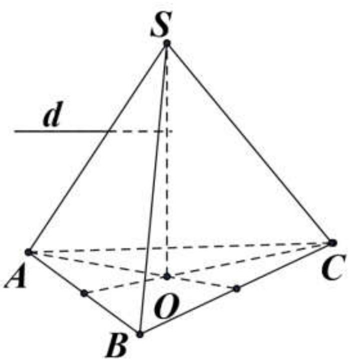
Theo tính chất qua một điểm cho trước chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 2. Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$. Gọi O là trọng tâm của ΔABC. Đường thẳng $d \perp SO$ $\left(d \not\subset (ABC)\right)$. Khi đó

A. $d//(ABC)$. **B.** $d \perp (SBC)$. **C.** $SO//AC$. **D.** $SA//OC$.

Lời giải

Chọn A



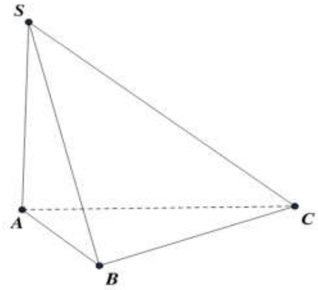
Ta có: $\begin{cases} SO \perp (ABC) \\ d \perp SO \end{cases} \Rightarrow d//(ABC)$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC). Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $SA \perp SB$. **B.** $SA \perp SC$. **C.** $SA \perp AB$. **D.** $SB \perp SC$.

Lời giải

Chọn C



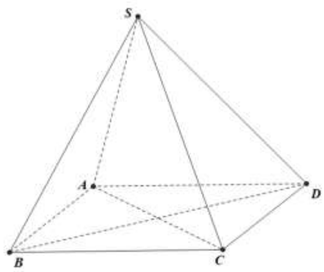
$\left.\begin{array}{l} SA \perp (ABC) \\ AB \subset (ABC) \end{array}\right\} \Rightarrow SA \perp AB.$

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SB \perp BC$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $SA \perp (ABCD)$. **B.** $SB \perp (ABCD)$. **C.** $BC \perp (SAC)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\left.\begin{array}{l} BC \perp SB, BC \perp AB \\ SB \cap AB = \{B\} \\ SB, AB \subset (SAB) \end{array}\right\} \Rightarrow BC \perp (SAB).$

Câu 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P), trong đó $a \perp (P)$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. Nếu $b \perp (P)$ thì $b // a$.

B. Nếu $b // (P)$ thì $b \perp a$.

C. Nếu $b // a$ thì $b \perp (P)$.

D. Nếu $b \perp a$ thì $b // (P)$.

Lời giải

Chọn D

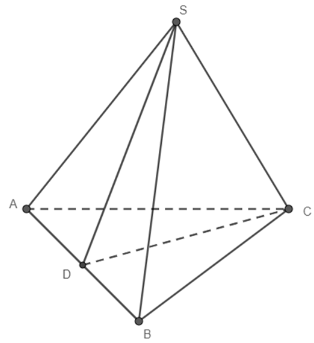
Theo định lý ta có: **D** sai vì đường thẳng b có thể nằm trong mặt phẳng (P).

Câu 6. Cho hình chóp tam giác $SABC$ có $SA = SB$ và $AC = CB$. Khẳng định nào sau đây **ĐÚNG?**

A. $BC \perp (SBA)$. **B.** $SB \perp AB$. **C.** $SA \perp (ABC)$. **D.** $AB \perp SC$.

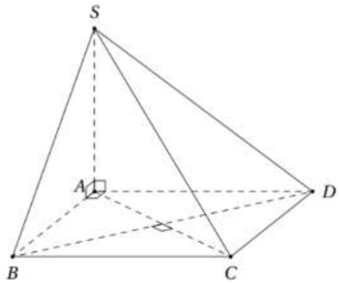
Lời giải

Chọn D



Gọi D là trung điểm của AB, vì tam giác SAB cân tại S và tam giác ABC cân tại C nên suy ra $\begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp CD \end{cases} \Rightarrow AB \perp SC$.

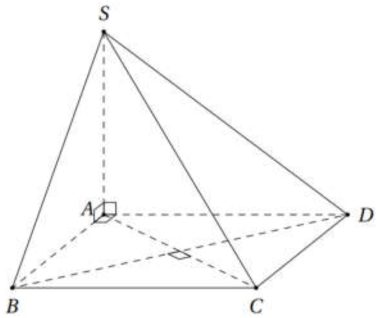
Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $AC \perp (SCD)$. **B.** $BD \perp (SAC)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $BD \perp (SAD)$.

Lời giải

Chọn B



Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$ và $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SA$.

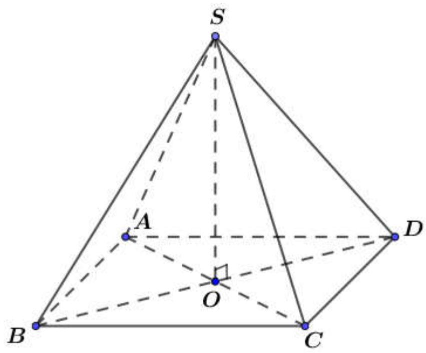
Vậy $BD \perp (SAC)$.

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Khi đó đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAB). **B.** (SBD). **C.** (SCD). **D.** (SAD).

Lời giải

Chọn B



Ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO,\ SO \subset (SBD)$.

Mặt khác: $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD,\ BD \subset (SBD)$.

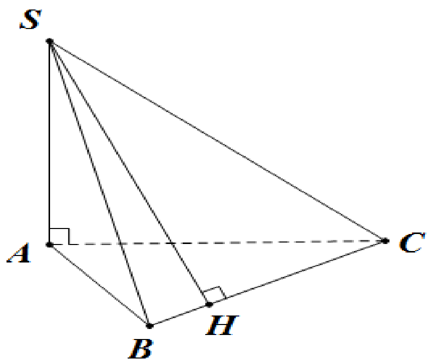
Suy ra: $SO \cap BD = O \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC. Hãy chọn khẳng định đúng?

A. $BC \perp SC$. **B.** $BC \perp AC$. **C.** $BC \perp AB$. **D.** $BC \perp AH$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH$.

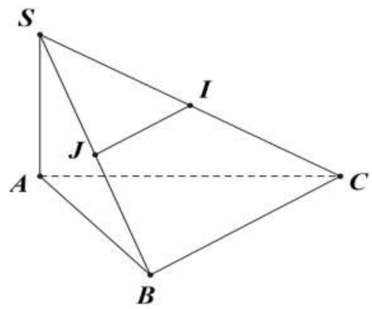
Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác vuông tại B. Gọi $I;J$ lần lượt là trung điểm của SC; SB. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $AB \perp (SBC)$. **B.** $IJ \perp (SAC)$.

C. $IJ \perp (SAB)$. **D.** Tam giác SCB vuông ở C.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB\left(Do\ \Delta ABC\ vuông\right) \\ SA \perp BC\left(Do\ SA \perp \left(ABC\right)\right) \end{cases} \Rightarrow BC \perp \left(SAB\right)$.

Mà $IJ // BC$ (Vì IJ là đường trung bình của $\triangle SBC$).

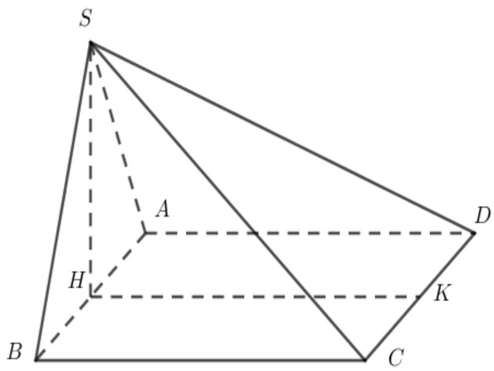
Suy ra: $IJ \perp \left(SAB\right)$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mệnh đề nào sau đây là **sai?**

A. $BC \perp \left(SAB\right)$. **B.** $SH \perp \left(ABCD\right)$. **C.** $AB \perp \left(SAD\right)$. **D.** $CD \perp \left(SHK\right)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có tam giác SAB đều cạnh a nên $SB = AB = a$.

Mặt khác tam giác SBC có $SB^2 + BC^2 = SC^2 = 2a^2$.

Suy ra tam giác SBC vuông cân tại B. Hay $BC \perp SB$

Mà $BC \perp AB$. Suy ra $BC \perp \left(SAB\right)$. Do đó **A** đúng.

Từ $BC \perp \left(SAB\right) \Rightarrow BC \perp SH$.

Tam giác SAB đều mà H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

Từ và suy ra $SH \perp \left(ABCD\right)$. Do đó **B** đúng.

Tam giác SAB đều nên AB không vuông góc với mặt phẳng $\left(SAD\right)$. Do đó **C** sai.

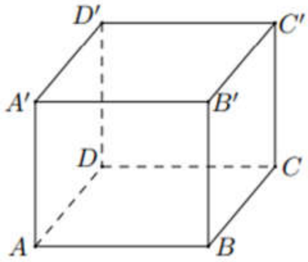
Ta có $\begin{cases} AB \perp HK \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp (SHK)$. Do đó **D** đúng

Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

A. $AC' \perp (BB'D'D)$. **B.** $AC' \perp (ABCD)$. **C.** $AC' \perp (AA'D'D)$. **D.** $AC' \perp (A'BD)$.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC' (1)$

Ta có: $\begin{cases} AD' \perp A'D (\text{ do } ADD'A' \text{ là hv}) \\ D'C' \perp (ADD'A') \Rightarrow D'C' \perp A'D \end{cases} \Rightarrow A'D \perp (AD'C') \Rightarrow A'D \perp AC' (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow AC' \perp (A'BD)$.

PHẦN II. Câu hỏi trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 13 đến câu 16. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi, thí sinh chọn đúng hoặc chọn sai.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O. Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

a) $AC \perp SD$.

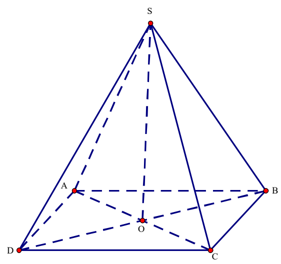
b) $SO \perp (ABCD)$.

c) $CD \perp (SBD)$.

d) $BD \perp SA$.

Lời giải

a) Đúng **b) Đúng** **c) Sai** **d) Đúng**



Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$

Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SD$. Vậy A đúng.

Vì $SA = SC$ và $SB = SD$ nên các tam giác SAC và SBD cân tại S.

Suy ra $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD)$. Vậy B đúng.

Mặt khác, ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SA$. Vậy D đúng

Từ kết quả trên, suy ra C sai.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D, $AD = CD = a$, $AB = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $BC \perp (SAC)$.

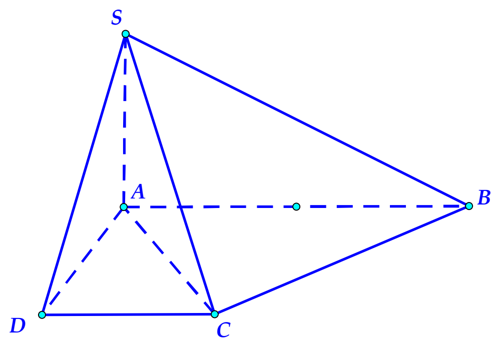
b) $AD \perp (SAB)$.

c) $AC \perp (SBD)$.

d) Tam giác SCD vuông tại C.

Lời giải

a) Đúng **b) Đúng** **c) Sai** **d) Sai**



Từ giả thiết ta có ΔABC vuông cân C. Suy ra $\begin{cases} BC \perp AC \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAC) \Rightarrow$. **A** đúng.

Ta có : $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp SA \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow$ B đúng

Từ giả thiết, ta có : BD không vuông góc $AC \Rightarrow$ **C** sai.

Ta có: $\begin{cases} DC \perp AD \\ DC \perp SA \end{cases} \Rightarrow DC \perp (SAD) \Rightarrow DC \perp SD$ hay tam giác SCD vuông tại **(D)** Nên D Sai

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B. Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC. Khi đó:

a) Tam giác SBC cân tại B.

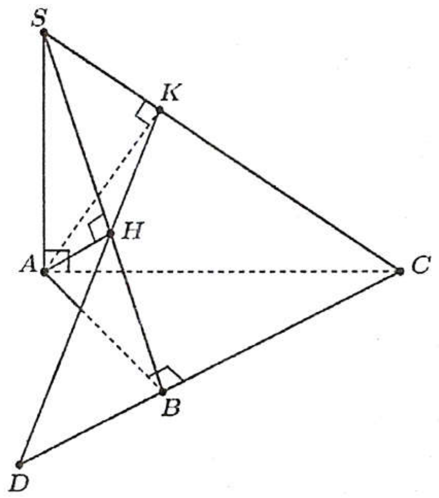
b) AH vuông góc với mặt phẳng (SBC).

c) $(SC, HK) = 90^\circ$

d) Giả sử HK cắt BC tại D. Khi đó $(AC, AD) = 90^\circ$.

Lời giải

a) Sai **b) Đúng** **c) Đúng** **d) Đúng**



a) Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA (\text{do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$,

mà $SB \subset (SAB)$ nên $BC \perp SB$ hay tam giác SBC vuông tại B.

b) Ta có: $\begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC (\text{do } BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC)$.

c) Ta có: $\begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp AH (\text{do } AH \perp (SBC)) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK)$,

mà $HK \subset (AHK)$ nên $SC \perp HK$ hay $(SC, HK) = 90^\circ$.

d) Vì $(AHK) \equiv (ADK)$ mà $SC \perp (AHK)$ nên $SC \perp (ADK) \Rightarrow SC \perp AD$. (1)

Mặt khác $SA \perp AD$ (do $SA \perp (ABC), AD \subset (ABC)$). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AD \perp (SAC) \Rightarrow AD \perp AC$ hay $(AC, AD) = 90^\circ$

Câu 16. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh a. Khi đó:

a) $A'D' \perp \left(ABB'A'\right)$

b) $\left(A'D', AB'\right) = 90^\circ$

c) $B'D' \perp \left(AA'O\right)$

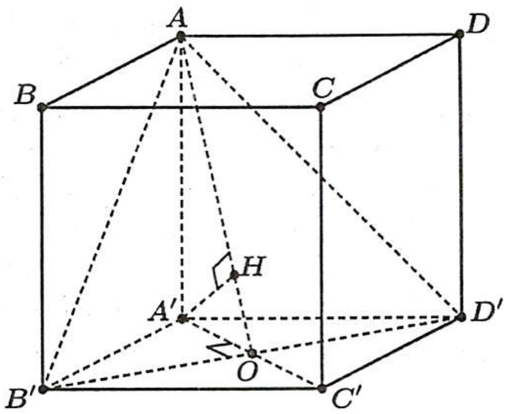
d) Tìm được hình chiếu H của điểm A' trên mặt phẳng $\left(AB'D'\right)$. Khi đó $A'H = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng **b) Đúng** **c) Đúng** **d) Sai**

Ta có: $\begin{cases} A'D' \perp AA' \\ A'D' \perp A'B' \end{cases} \Rightarrow A'D' \perp \left(ABB'A'\right)$, mà $AB' \subset \left(ABB'A'\right)$ nên $A'D' \perp AB'$.

Vậy $\left(A'D', AB'\right) = 90^\circ$.



Gọi O là tâm hình vuông $A'B'C'D'$ nên $A'O \perp B'D'$.

Mặt khác $AA' \perp B'D'$ nên $B'D' \perp \left(AA'O\right)$.

Kẻ đường cao $A'H$ trong tam giác $AA'O$.

Khi đó: $\begin{cases} A'H \perp AO \\ A'H \perp B'D' \end{cases}$

$\Rightarrow A'H \perp \left(AB'D'\right)$.

Do vậy H là hình chiếu của A' lên mặt phẳng $\left(AB'D'\right)$.

Hình vuông $A'B'C'D'$ có đường chéo $A'C' = a\sqrt{2} \Rightarrow A'O = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác $AA'O$ vuông tại A' có đường cao $A'H$ nên

$$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{A'O^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{2}} = \frac{3}{a^2}$$

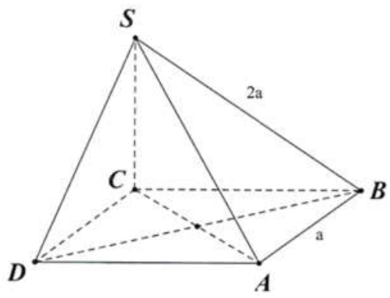
$\Rightarrow A'H = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$.

PHẦN III. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 17 đến câu 22.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SC \perp (ABCD)$ và $SB = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SA và DC (làm tròn đến 1 chữ số phần thập phân).

Trả lời: $63,4^{\circ}$

Lời giải



Ta có: $AB//CD \Rightarrow (SA,CD) = (SA,AB)$

Ta có: $\begin{cases} AB \perp CB \\ AB \perp SC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SBC) \Rightarrow AB \perp SB$

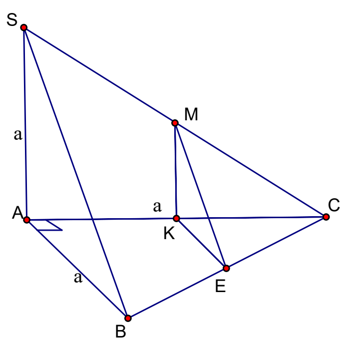
Xét tam giác SAB vuông tại B có: $\tan\widehat{SAB} = \dfrac{SB}{AB} = \dfrac{2a}{a} = 2 \Rightarrow \widehat{SAB} \approx 63,4^{\circ}$

Vậy $(SA,CD) \approx 63,4^{\circ}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, $AB = AC = a$; cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, $SA = a$. Gọi M là trung điểm của SC. Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và vuông góc với AC bằng $\dfrac{ma^2}{n}$ với $(m,n) = 1; m,n \in \mathbb{N}^*$. Tính $m+n$.

Trả lời: 9

Lời giải:



Gọi K, E lần lượt là trung điểm AC và BC. Khi đó $MK \perp AC$, $KE \perp AC$ nên mặt phẳng (P) là (MKE).

Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác MKE vuông tại K.

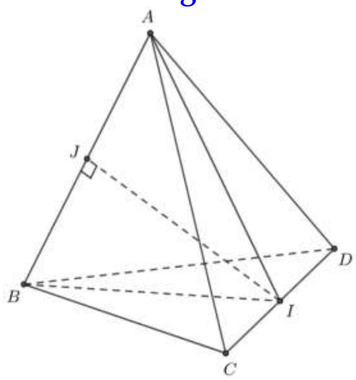
$S_{\Delta MKE} = \frac{1}{2}MK.KE = \frac{1}{2}.\frac{a}{2}.\frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$.

$m+n=9$.

Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x$ $(x>0)$, các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 4. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và vuông góc với cạnh CD tại I. Diện tích tam giác IAB lớn nhất bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng đơn vị)

Trả lời: 6

Lời giải



Vì mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và vuông góc với cạnh CD tại I nên $(P) \equiv (ABI)$.

Có $(ABI) \perp CD \Rightarrow AI \perp CD$ mà tam giác ACD đều nên I là trung điểm của CD.

Có AI và BI là trung tuyến của tam giác đều ACD và BCD cạnh bằng 4 nên $AI = BI = 2\sqrt{3}$. Xét tam giác IAB cân tại I, gọi J là trung điểm của AB thì $IJ \perp AB$ và $IJ = \sqrt{IA^2 - AJ^2} = \sqrt{12 - \frac{x^2}{4}} = \frac{\sqrt{48 - x^2}}{2}$.

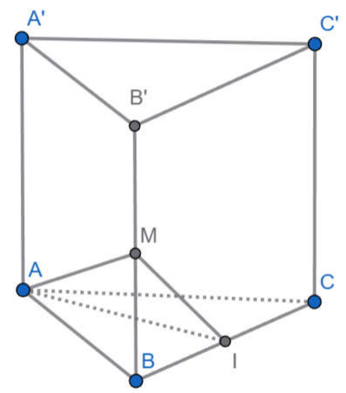
Vậy $S_{\Delta IAB} = \frac{1}{2}IJ.AB = \frac{1}{4}x\sqrt{48-x^2} = \frac{1}{4}\sqrt{\left(48-x^2\right)x^2} \le \frac{1}{4}.\frac{48-x^2+x^2}{2} = 6$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 48 - x^2 = x^2 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{6}$.

Vậy $S_{\Delta IAB}$ lớn nhất bằng 6.

Câu 20. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đáy ABC là tam giác đều có cạnh bằng 4, cạnh bên CC' vuông góc với đáy và có độ dài bằng 5. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BB', BC. Tính diện tích ΔAMI? (làm tròn đến 2 chữ số phần thập phân)

Lời giải



$AI \perp (BB'C'C); MI \subset (BB'C'C) \Rightarrow AI \perp MI$ hay $\widehat{AIM} = 90°$.

$MI = \frac{1}{2}B'C = \frac{1}{2}\sqrt{4^2+5^2} = \frac{\sqrt{41}}{2}$ (tính chất đường trung bình trong tam giác $B'BC$)

$AI = 2\sqrt{3}$ (đường cao trong tam giác đều cạnh 4)

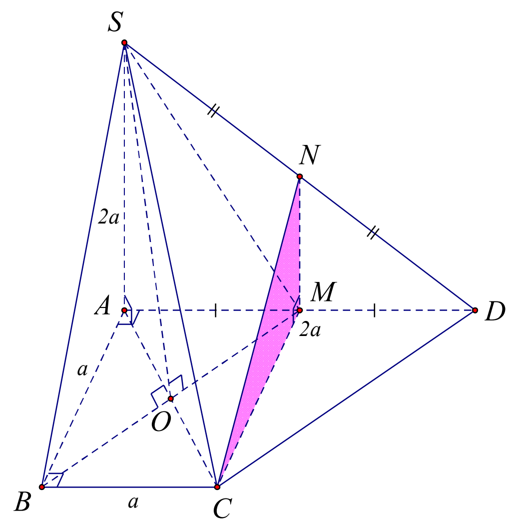
Diện tích tam giác AMI $\left(\widehat{AIM} = 90°\right)$ là:

$S_{\Delta AMI} = \frac{1}{2}.MI.AI = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}B'C.AI = \frac{1}{4}.\sqrt{41}.2\sqrt{3} = \frac{\sqrt{123}}{2} \approx 5.55$

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B. Biết $AB = BC = a$, $SA = AD = 2a$. Lấy M, N lần lượt là trung điểm cạnh AB và SB, qua M vẽ mặt phẳng (α) vuông góc với BC. Tính tỉ số diện tích ΔSMB và diện tích ΔMNC (làm tròn đến 2 chữ số phần thập phân).

Trả lời: 3

Lời giải



Gọi O là giao điểm 2 đường chéo AC và BM của hình vuông $ABCM$

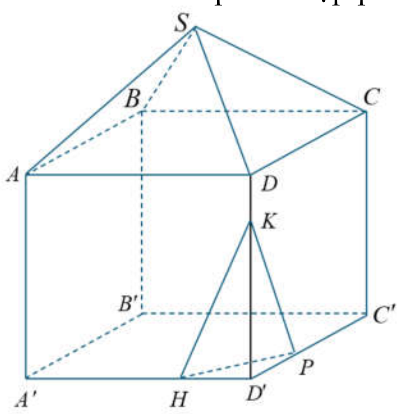
$\left.\begin{array}{l} BM \perp AC \\ BM \perp SA \end{array}\right\} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow SO \perp BM$

$BM = a\sqrt{2}$; $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $SO = \sqrt{SA^2 + AO^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}a$

Diện tích ΔSMB là: $S_{\Delta SMB} = \frac{1}{2}SO.BM = \frac{1}{2}.\frac{3\sqrt{2}}{2}a.a\sqrt{2} = \frac{3}{2}a^2$

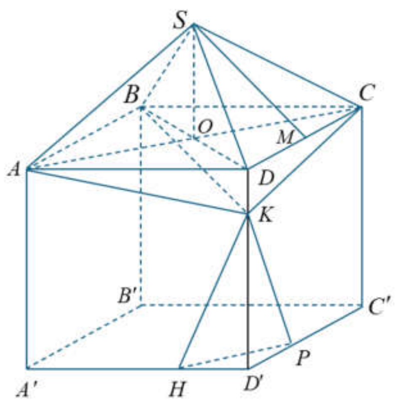
Tỉ số diện tích ΔSMB và diện tích ΔMNC là: $\frac{S_{\Delta SMB}}{S_{\Delta MNC}} = \frac{\frac{3}{2}a^2}{\frac{a^2}{2}} = 3$

Câu 22. Chị Hằng đã cắt các thùng carton và làm cho con gái một ngôi nhà chòi cho búp bê như hình mô phỏng dưới đây. Phần thân nhà có dạng là hình lập phương cạnh 60 cm, phần mái nhà được ghép lại từ 4 tam giác cân có cạnh bên bằng 50 cm. Tính chiều cao tối đa của ngôi nhà chòi trên? (làm tròn đến 1 chữ số phần thập phân)



Trả lời: 86.5

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó các tam giác cân SAC, SBD có SO là đường trung tuyến nên cũng là đường cao.

$$\left.\begin{array}{l} SO \perp AC \\ SO \perp BD \\ AC \cap BD = O \, trong \, (ABCD) \end{array}\right\} \Rightarrow SO \perp (ABCD).$$

Trong tam giác SOD có: $SO = \sqrt{SD^2 - OD^2} = \sqrt{50^2 - \left(30\sqrt{2}\right)^2} = 10\sqrt{7}$.

Vậy chiều cao tối đa của căn nhà chòi là $SO + AA' = 10\sqrt{7} + 60 \approx 86.5 \, cm$.

PHẦN IV. Câu hỏi tự luận. Thí sinh trả lời từ câu 23 đến câu 28.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD.

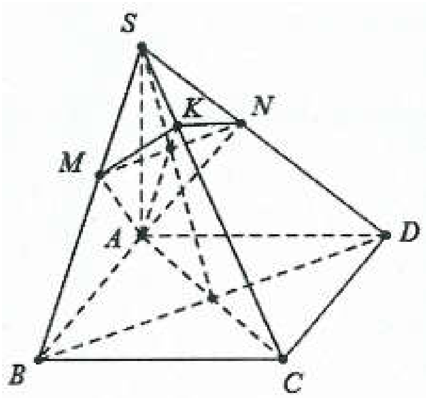
a) Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.

b) Chứng minh rằng $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD)$.

c) Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN // \mathrm{BD}$.

d) Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN). Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải



a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác ABCD là hình vuông nên $BC \perp AB$. Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự chứng minh trên ta có: $CD \perp (SAD)$.

b) Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$

Tương tự ta có: $AN \perp (SCD)$.

c) Do $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AN \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AN \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $CM = DN$. Mặt khác tam giác SBD cân tại đỉnh S nên $MN // \mathrm{BD}$.

d) Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do $\mathrm{MN} // \mathrm{BD} \Rightarrow \mathrm{MN} \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp AK$.

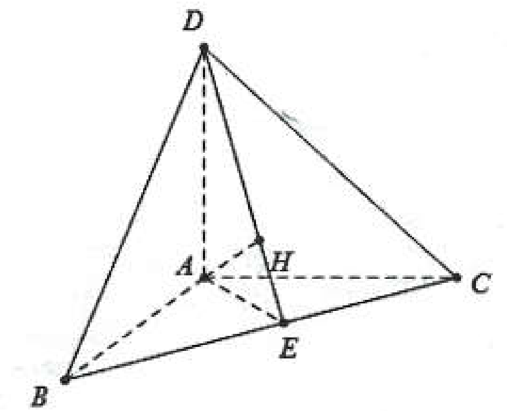
Câu 24. Cho tứ diện $ABCD$ có ba cạnh AB, AC, AD đôi một vuông góc.

a) Chứng minh hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên mặt phẳng (BCD) trùng với trực tâm của tam giác BCD.

b) Chứng minh rằng $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$.

c) Chứng minh rằng tam giác BCD có 3 góc nhọn.

Lời giải



a) Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm A trên mặt phẳng (BCD) thì $AH\perp(BCD)$.

Ta có: $\begin{cases} AD\perp AB \\ AD\perp AC \end{cases}\Rightarrow AD\perp(ABC)\Rightarrow AD\perp BC$.

Mặt khác $AH\perp BC\Rightarrow BC\perp(ADH)\Rightarrow BC\perp DH$

Tương tự chứng minh trên ta có: $BH\perp CD$

Do đó H là trực tâm của tam giác BCD.

b) Gọi $E=DH\cap BC$, do $BC\perp(ADH)\Rightarrow BC\perp AE$.

Xét ΔABC vuông tại A có đường cao AE ta có: $\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}$.

Lại có: $\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AD^2}+\frac{1}{AE^2}=\frac{1}{AB^2}+\frac{1}{AC^2}+\frac{1}{AD^2}$ (đpcm).

c) Đặt $AB=x;\ AC=y$ và $AD=z$. Ta có: $\begin{cases} BC=\sqrt{x^2+y^2} \\ BD=\sqrt{x^2+z^2} \\ CD=\sqrt{y^2+z^2} \end{cases}$

Khi đó $\cos B=\frac{BC^2+BD^2-CD^2}{2.BC.BD}=\frac{x^2}{BC.BD}>0\Rightarrow \widehat{CBD}<90^\circ$

Tương tự chứng minh trên ta cũng có $\begin{cases} \widehat{BDC}<90^\circ \\ \widehat{BCD}<90^\circ \end{cases}\Rightarrow$ tam giác BCD có 3 góc nhọn.

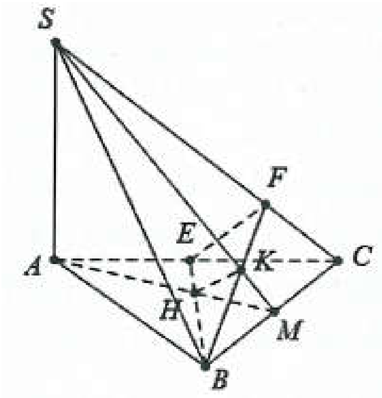
Câu 25. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA\perp(ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC. Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.

b) $SC\perp(BHK)$.

c) $HK\perp (SBC)$.

Lời giải



a) Giả sử $AH\perp BC$ tại M. Ta có: $\begin{cases} BC\perp AM \\ BC\perp SA \end{cases}\Rightarrow BC\perp (SAM)\Rightarrow BC\perp SM$

Mặt khác $SK\perp BC\Rightarrow S,K,M$ thẳng hàng do đó AH,SK,BC đồng quy tại điểm M.

b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH\perp AC$

Mặt khác $BH\perp SA\Rightarrow BH\perp (SAC)\Rightarrow BH\perp SC$.

Lại có: $BK\perp SC\Rightarrow SC\perp (BHK)$.

c) Do $SC\perp (BHK)\Rightarrow SC\perp HK$. Mặt khác $BC\perp (SAM)\Rightarrow BC\perp HK$.

Do đó $HK\perp (SBC)$.

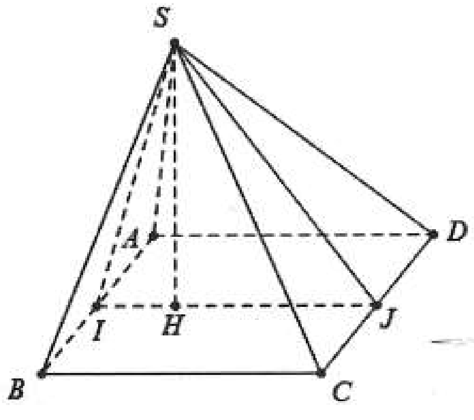
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều, SCD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính các cạnh của tam giác SIJ, suy ra tam giác SIJ vuông.

b) Chứng minh rằng $SI\perp (SCD)$; $SJ\perp (SAB)$.

c) Gọi H là hình chiếu của S lên IJ. Chứng minh rằng $SH\perp (ABCD)$.

Lời giải



a) Ta có: ΔSAB đều cạnh a nên $SI=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ nên tứ giác $IBCJ$ là hình chữ nhật

Suy ra $IJ=BC=a$.

ΔSCD là tam giác vuông cân đỉnh $S \Rightarrow SJ = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Do đó $SJ^2 + SI^2 = IJ^2 = a^2 \Rightarrow \Delta SIJ$ vuông tại S.

b) Do ΔSCD cân tại S nên $SJ \perp CD$ và do $AB // CD \Rightarrow SJ \perp AB$.

Mặt khác $SJ \perp SI \Rightarrow SJ \perp (SAB)$.

Chứng minh tương tự ta có: $SI \perp (SCD)$.

c) Do $SI \perp (SCD) \Rightarrow SI \perp CD$

Mặt khác $CD \perp IJ \Rightarrow CD \perp (SIJ) \Rightarrow CD \perp SH$.

Do $SH \perp IJ \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

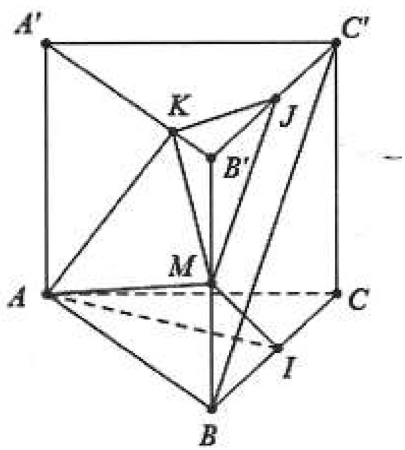
Câu 27. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a. Cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

a) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh $AI \perp BC'$.

b) Gọi M là trung điểm của BB'. Chứng minh $BC' \perp AM$.

c) Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \dfrac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh rằng: $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.

Lời giải



a) Do ΔABC là tam giác đều và I là trung điểm của BC nên $AI \perp BC$.

Mặt khác $AI \perp CC' \Rightarrow AI \perp (BCC'B') \Rightarrow AI \perp BC'$.

b) Dễ thấy $BCC'B'$ là hình vuông nên $B'C \perp BC'$.

Mặt khác MI là đường trung bình trong tam giác $B'BC$ nên $MI // B'C$ suy ra $MI \perp BC'$.

Lại có: $AI \perp BC' \Rightarrow BC' \perp (AIM) \Rightarrow BC' \perp AM$.

c) Ta có: $\tan \widehat{KMB'} = \dfrac{KB'}{MB'} = \dfrac{1}{2}; \tan \widehat{AMB} = \dfrac{AB}{BM} = 2$

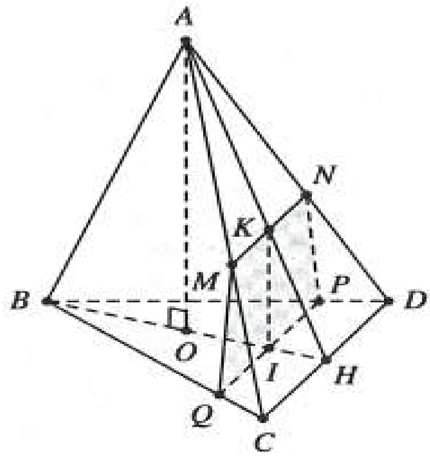
Suy ra $\tan \widehat{KMB'} = \cot \widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{KMB'} + \widehat{AMB} = 90°$.

Do đó $\widehat{AMK} = 90° \Rightarrow AM \perp MK$.

Mặt khác $\begin{cases} AM \perp BC' \\ MJ \,//\, \text{BC}' \end{cases} \Rightarrow AM \perp MJ$. Suy ra $AM \perp (MKJ) \Rightarrow AM \perp KJ$.

Câu 28. Cho tứ diện $ABCD$ có ΔBCD đều, gọi BH là đường cao của ΔBCD, O là trung điểm của BH và $AO \perp (BCD), AO = BH = 2a$, trên OH lấy điểm I sao cho $BI = x(a < x < 2a)$, mặt phẳng (α) đi qua I và vuông góc OH. Dựng và tính diện tích thiết diện của tứ diện tạo bởi (α).

Lời giải



Vì $AO \perp (BCD) \Rightarrow AO \perp OH$

Qua I kẻ $IK \,//\, \text{AH}(K \in AH)$.

Tam giác BCD đều $\Rightarrow BH \perp CD$, qua K kẻ đường thẳng d song song với đường thẳng CD cắt SC, SD lần lượt tại M, N.

Qua I kẻ đường thẳng Δ song song với đường thẳng CD cắt BC, BD lần lượt tại Q, P.

Suy ra mặt phẳng (α) cắt khối chóp theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Diện tích hình thang $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2} IK.(MN + PQ)$.

Tam giác BCD có: $\dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{BI}{BH} \Rightarrow PQ = \dfrac{x}{2a}.\dfrac{4a\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2x\sqrt{3}}{3}$.

Tam giác ACD có: $\dfrac{MN}{CD} = \dfrac{AK}{AH} = \dfrac{OI}{OH} \Rightarrow MN = \dfrac{OI.CD}{OH} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}(x - a)$.

Tam giác AHO có: $\dfrac{IK}{AO} = \dfrac{IH}{OH} \Rightarrow IK = \dfrac{IH.AO}{OH} = 2(2a - x)$.

Vậy diện tích hình thang $MNPQ$ là:

$$S = \frac{1}{2}.2(2a - x)\left(\frac{2x\sqrt{3}}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3}(x - a)\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2a - x)(3x - 2a).$$

BẢNG ĐÁP ÁN

PHẦN I

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Chọn	D	A	C	D	D	D	B	B	D	C	C	D

PHẦN II

Câu 13	Câu 14	Câu 15	Câu 16
a) Đ	a) Đ	a) S	a) Đ
b) Đ	b) Đ	b) Đ	b) Đ
c) S	c) S	c) Đ	c) Đ
d) Đ	d) S	d) Đ	d) S

PHẦN III

Câu	17	18	19	20	21	22
Chọn	63.4	9	6	5.55	3	86.5